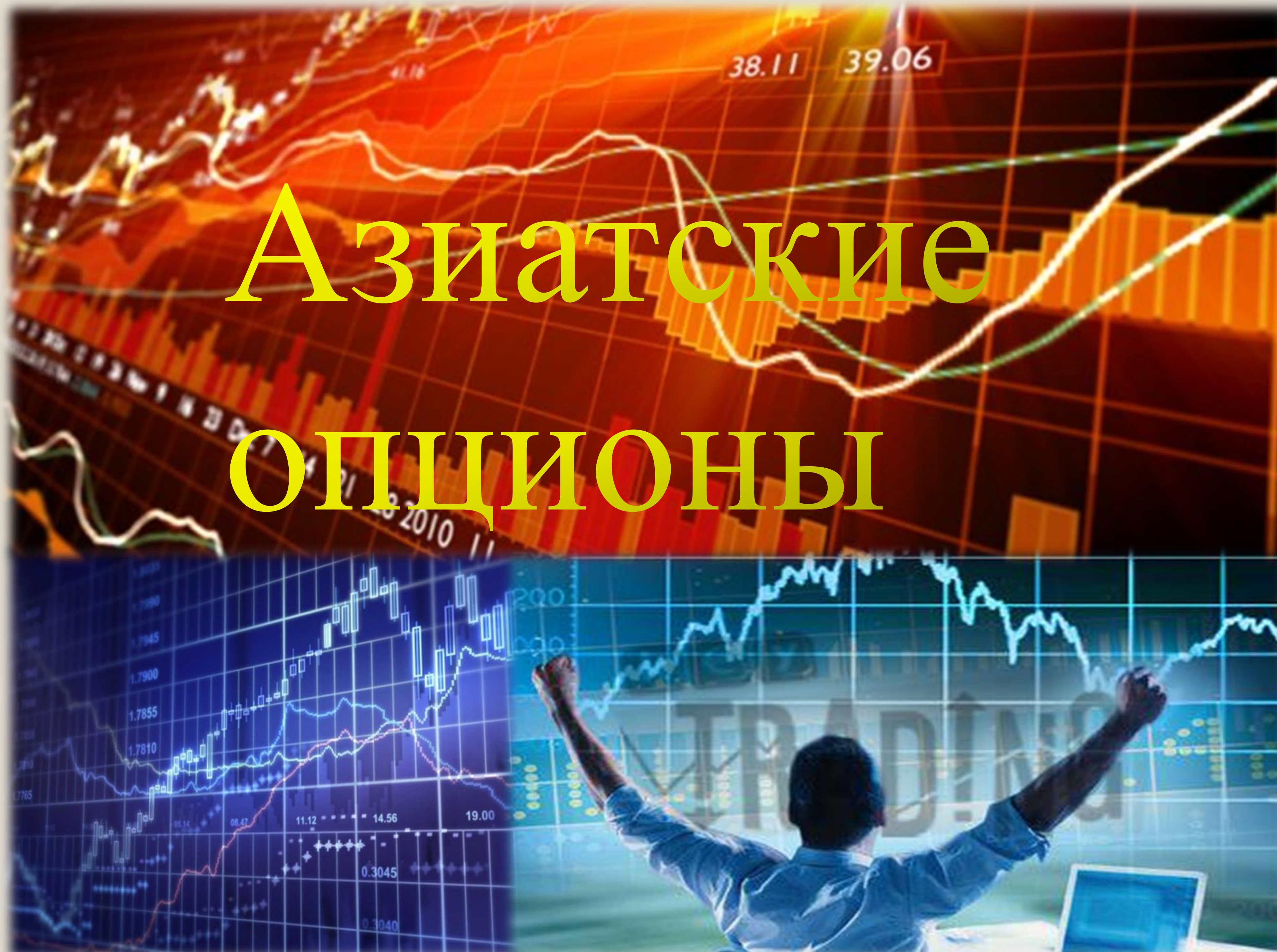
Азиатские опционы



Цель работы

- определение стоимости азиатского опциона с применением методики численного решения уравнения Блэка-Шоулза для азиатских опционов разностными методами;

Новизна

- адаптация известных разностных методов к численному решению задачи оценивания азиатских опционов;
- разработка алгоритма решения задачи оценивания размера стоимости азиатского опциона;
- создание программного опционного калькулятора для оценивания размера выплаты азиатских опционов.

Актуальность

- в настоящее время отсутствуют калькуляторы для оценки и исследования зависимости стоимости азиатских опционов от различных значений начальных параметров.

Основные термины

Опцион – это договор, согласно которому участник сделки (покупатель или продавец актива) получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу ценных бумаг по заранее определенной цене E в установленный договором момент времени T.

Типы опционов:
- *Put;*
- *Call;*

Стили опционов:
- стандартные (“ванильные”): европейский, американский;
- экзотические (барьерные, бинарные, Lookback, Shout и, в частности – азиатский);

Азиатский опцион (англ. *asian option*) — это экзотический опцион, цена исполнения которого определяется на основе средней стоимости базового актива за определенный период времени.

Азиатский put опцион средней цены имеет выплату в момент времени T:

$$\max\left(E - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right)$$

Модель Блэка-Шоулза

Модель ценообразования опционов Блэка–Шоулза (англ. *Black–Scholes Option Pricing Model*, *OPM*) — это модель, которая определяет теоретическую цену на опционы.
Модель Блэка-Шоулза для **стандартных** опционов:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Модель Блэка–Шоулза для выплаты **азиатского** опциона имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0$$

где $A_t = \int_0^t f(S_\theta, \theta)\,d\theta$ или $A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k} S_i$ - среднее арифметическое

Решения данного уравнения определены на области: S > 0, A > 0, 0 ≤ t ≤ T

Замена переменных

Задача, с функцией выплаты V, зависящей от переменных A,S,t является четырехмерной. Для перехода к трехмерной задаче произведем замену и введем вспомогательную переменную

$$R_t = \frac{1}{S_t}\int_0^t S_\theta d\theta$$

Тогда функция выплаты перепишется в виде

$$V(S,A,t) = S \cdot H(R,t)$$

Постановка задачи относительно *H*:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

$$H = 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \quad \text{при} \quad R = 0$$

$$H(R_T, T) = \left(1 - \frac{R_T}{T}\right)^+$$

Неявная разностная схема численного решения задачи:

$$-\frac{H_i^{n+1}-H_i^n}{\tau}+\frac{1}{2}\sigma^2 R_i^2\frac{H_{i-1}^{n+1}-2H_i^{n+1}+H_{i+1}^{n+1}}{h^2}+(1-rR_i)\frac{H_{i+1}^{n+1}-H_{i-1}^{n+1}}{2h}=0$$

Разностная схема после приведения к 3-х диагональному виду:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 R_i^2}{h^2}-\frac{(1-rR_i)}{2h}\right)H_{i-1}^{n+1}+\left(\frac{1}{\tau}-\frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2}\right)H_i^{n+1}+\left(\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 R_i^2}{h^2}+\frac{(1-rR_i)}{2h}\right)H_{i+1}^{n+1}=-\frac{1}{\tau}H_i^n$$

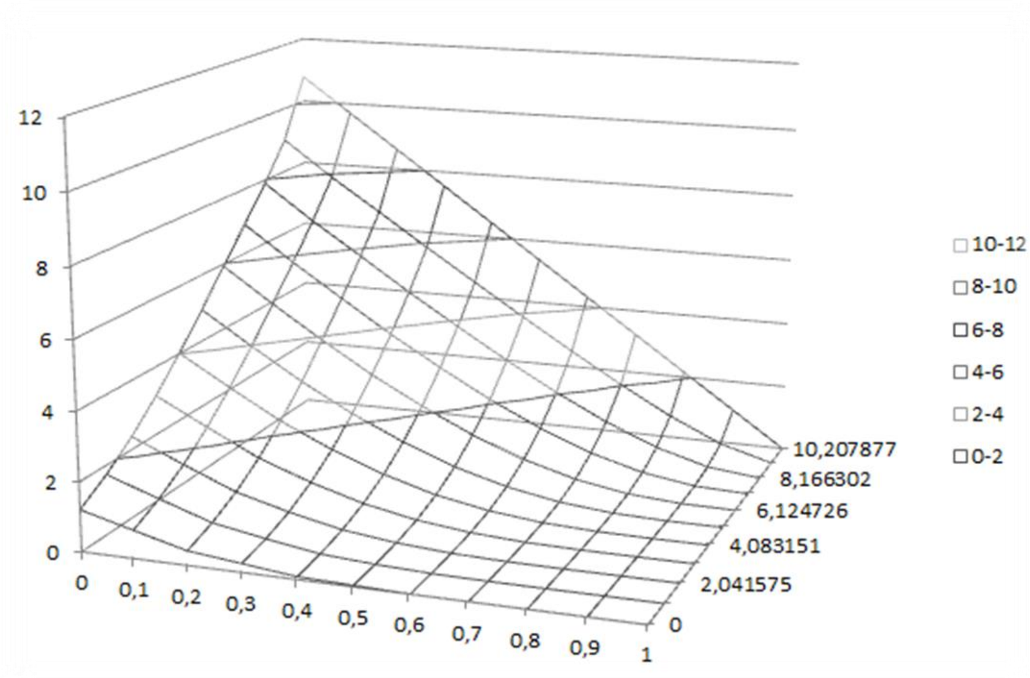
Здесь:

σ – волатильность;

r – процентная ставка;

n – номер временного слоя области.

Вид поверхности выплаты опциона, полученной в результате численного расчета цен базовых активов и вычисленных на их основе значений функции выплаты при начальных значениях параметров r=0.05, σ=0.25, E=10, T=1, n=10



Результаты численных расчетов

График поверхности выплаты азиатского *put* опциона при следующих начальных условиях: *T=1, r=0.05, s0=10, sigma=0.1*

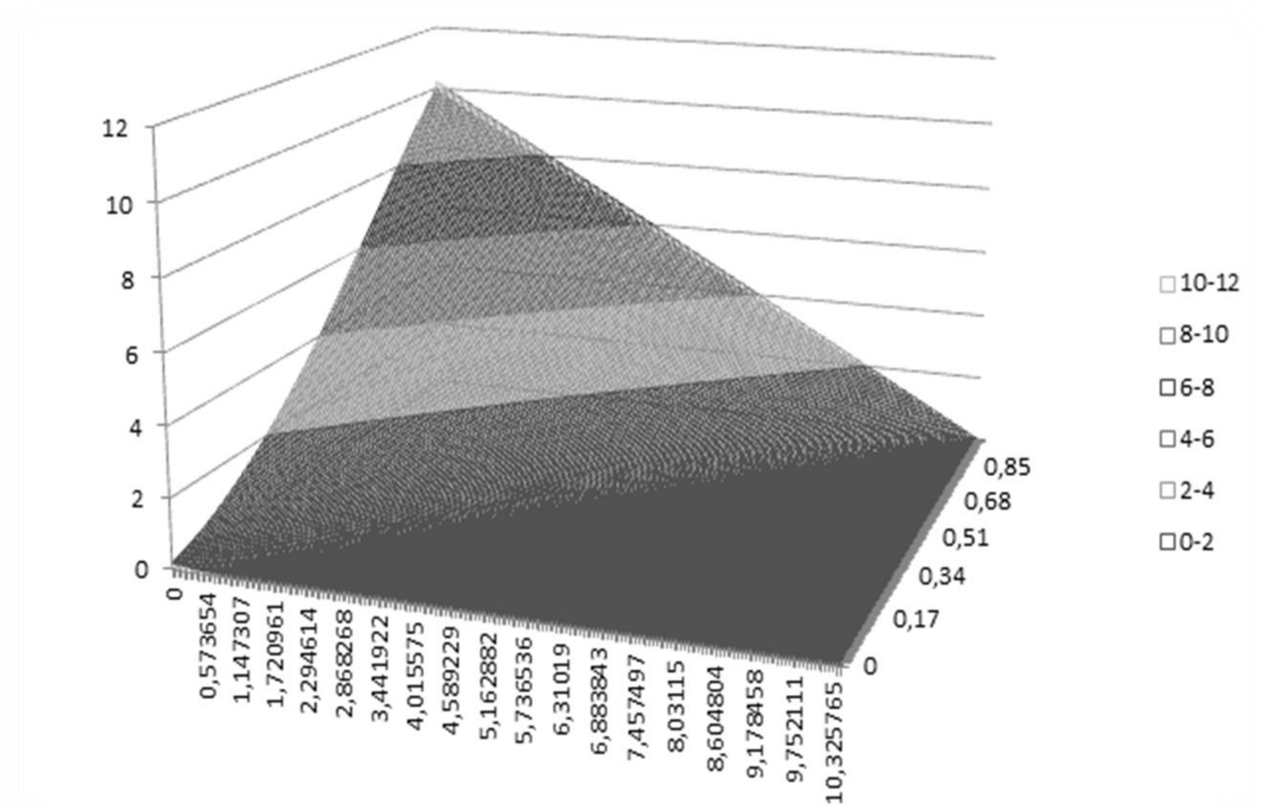
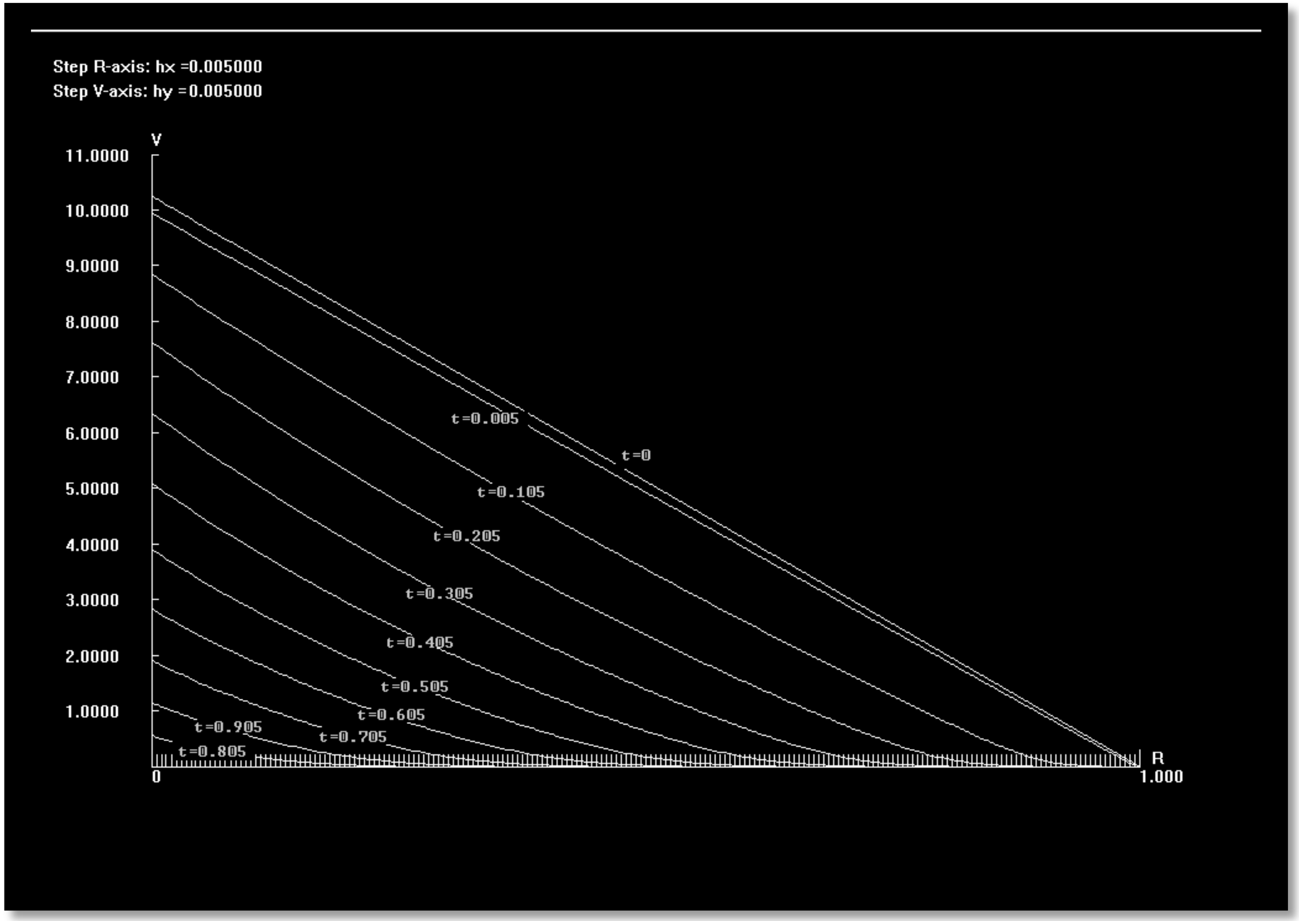


График временных срезов поверхности выплаты, полученной при начальных условиях *T=1, r=0.05, s0=10, sigma=0.1*



Заключение

Результаты работы:

- решена задача по оцениванию азиатских опционов с применением разностных методов в модели Блека-Шоулза;
- разработан алгоритм, позволяющий проводить оценку стоимости азиатских опционов;
- проведена исследовательская работа по установлению зависимости значений выплаты азиатского опциона от различных начальных данных;
- разработанный алгоритм реализован в виде программного кода на языке программирования C++, с возможностью представления данных с помощью таблиц и диаграмм в среде *Excel*.

Конец. Спасибо за внимание.

Формирование цены базовых активов.

Выплата азиатского опциона формируется на основе значений средних цен базовых активов в предыдущие моменты времени. Возникает необходимость спрогнозировать значения цен базовых активов S_t в каждый момент времени t, где $0 \leq t \leq T$.

Уравнение $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ имеет аналитическое решение:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

где величина S_0 является ценой базового актива в момент времени t=0

Член W_t, который входит в данное уравнение является численным значением величины винеровского процесса, применяемой для определения цен базовых активов за промежуток времени Т. Винеровский процесс основан на представлениях о движении частиц согласно броуновскому движению.

Винеровский процесс.

Случайный процесс W_t является непрерывным процессом со свойствами:

$-\ W_0 = 0.$

$- W_t \sim N(0,1)$ для всех $t \geq 0$ (здесь $N(0,1)$ является нормальным случайным распределением на интервале $(0;1)$).

$-$ все интервалы $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ независимы.
W_t непрерывно зависит от t.

Составим алгоритм моделирования стандартного винеровского процесса:

Алгоритм 1:

1. При $t=0$ $W_0 = 0$, задается Δt

В пунктах 2,3,4 $j \in [1; n]$

2. $t_j = t_{j-1} + \Delta t$

3. $Z \sim N(0,1)$

4. $W_j = W_{j-1} + Z\sqrt{\Delta t}$

Таким образом мы получаем значение величины W_t, подставляя которую в выражение $S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}$, получаем значение цены базового актива в момент времени t

Реализация Алгоритма 1 с разбиением на 5000 тысяч точек с шагом $\Delta t = 0.0002$:

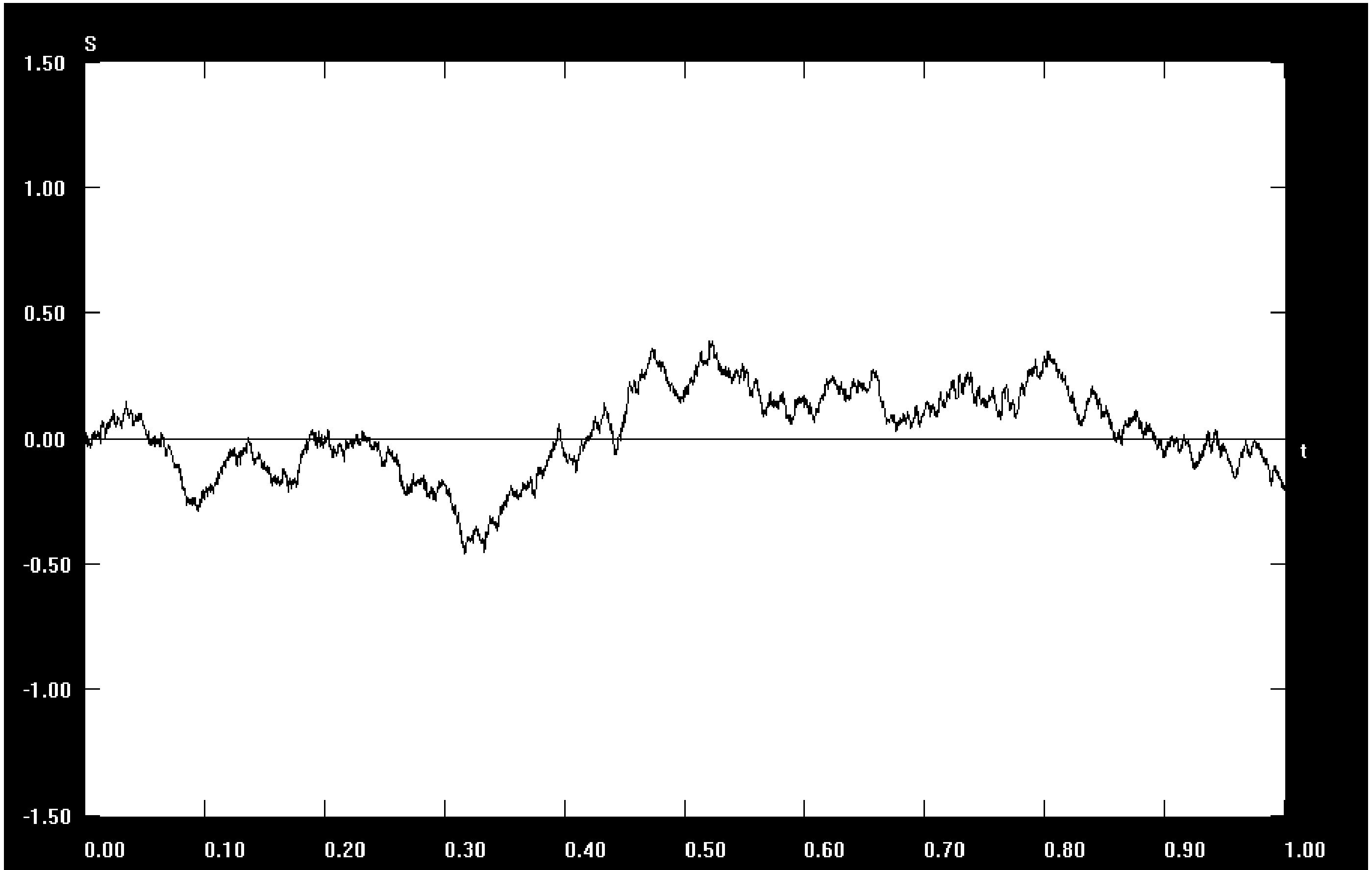


Рисунок 3

Изменения цен базовых активов по Алгоритму 1 (черные траектории) и средние значения цен (зеленая траектория) с разбиением на 5000 точек (временных слоев) с начальными данными: $S_0 = 7,\ \Delta t = 0.0002,\ r = 0.06,\ \sigma = 0.3$. Средняя цена вычисляется как среднее арифметическое за 100 итераций для каждого S_t в момент времени t.