

# GARCH–Jump модели

**С.П. Сидоров, В.А. Балаш, Р. Date,  
А.Р. Файзлиев, Е. Коробов**

Институт рисков Саратовского госуниверситета  
*sidorovsp@info.sgu.ru*

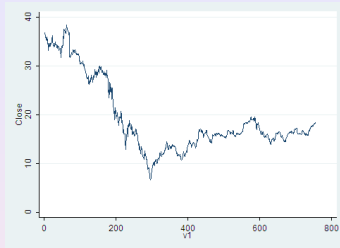
Поддержано РФФИ

7 ноября 2013 г.

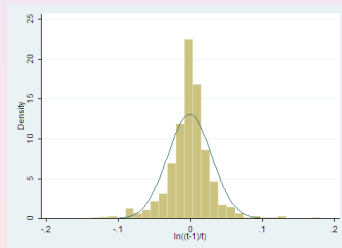
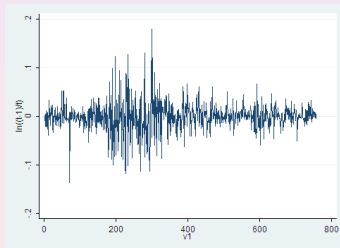
- ❶ Введение. Постановка задачи и мотивация
- ❷ Модели
  - 'чистая' GARCH модель
  - GARCH(1,1) модель дополненная **объемом торгов**
  - GARCH(1,1) модель дополненная данными **новостной интенсивности**
  - GARCH–Jump модель
  - GARCH–Jump, модель **дополненная данными новостной интенсивности**
- ❸ Введение в новостную аналитику
- ❹ Эмпирические результаты
  - Описание данных
  - Оценки параметров моделей
  - Тест отношения правдоподобия
- ❺ Заключение

# 1. Введение.

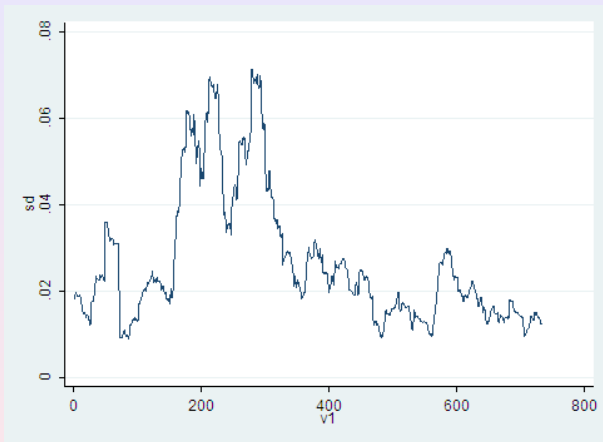
## Постановка задачи и мотивация



Цены  $P_t$  не стационарны и поэтому рассматриваются логарифмические доходности (log-returns):  
$$X_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$$



Цены закрытия, логарифмические доходности, гистограмма логарифмических доходностей акций General Electric (2 января, 2008 - 31 декабря, 2010)



**Figure:** Скользящее стандартное отклонение логарифмических доходностей цен закрытия акций General Electric (2 января, 2008 - 31 декабря, 2010), 21-дневное скользящее окно

Последовательность случайных переменных является гетероскедастичной, если они имеют различные дисперсии.

Гетероскедастичность может быть двух видов:

- Процесс называется *безусловно гетероскедастичным* если безусловная дисперсия не постоянна. (Доходности акций или бондов – цены имеют не постоянную волатильность, но периоды низкой или высокой волатильности заранее не известны).
- Процесс называется *условно гетероскедастичным* если условная дисперсия не постоянна. (цены на нефть - цены имеют более высокую волатильность летом).

Финансовые рынки и инвесторы реагируют нервно на важные новости, экономические кризисы, войны, природные катастрофы. В такие периоды цены финансовых активов могут сильно колебаться. Это означает, что условная дисперсия (conditional variance)

$$\text{Var}(X_t|I_{t-1}) := \text{Var}(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

не постоянна во времени и процесс  $X_t$  является условно гетероскедастичным. Т.е., волатильность

$$\sigma_t = \sqrt{\text{Var}(X_t|I_{t-1})}$$

меняется во времени.

Модели, которые используются для условно гетероскедастичных процессов:

- авторегрессионные условно гетероскедастичные модели (ARCH models);
- обобщенные ARCH модели (GARCH models)
- GARCH–Jump модели
- модели с переключениями режимов
- модели стохастической волатильности (stochastic volatility models).

# Объем торгов как прокси-переменная для числа новостей

7

Чем больше специфических новостей приходит о данной компании (ценной бумаге), тем больше инвесторы будут интерпретировать эффект этих новостей по-разному, будут иметь больше стимулов для торговли, т.к. их ожидания относительно будущих доходностей будут отличаться.

Karpoff [1987]  
Lamoureux and Lastrapes (1990)  
Najand and Yung (1991)  
Sharma (1996)  
Arago (2005)  
Vanitha (1997)  
Miyakoshi (2002)  
Bohl and Henke (2003)

Различные меры для оценки количества приходящей информации

- макроэкономические новости, Ederington (1993);
- число газетных статей и сообщений о прибылях-убытках в день, Berry (1993);
- число анонсов и новостей относительно данного рынка ценных бумаг, Mitchell (1994);
- число новостей и анонсов относительно данной компании, Kalev (2004);
- влияние новостных релизов на *index* волатильность, Janssen (2004).

Мы: рассматриваем компании FTSE100.

Задача: насколько улучшается объяснительная сила GARCH моделей, если использовать дополнительно информацию об объемах торгов или новостную интенсивность.

## 2. Модели

$X_t$  – логарифмическая доходность (log return) с  $t - 1$  по  $t$

$I_{t-1}$  информация о прошлом, содержащая значения всех переменных вплоть до момента  $t - 1$ . Инвестор владеет информацией  $I_{t-1}$  в момент принятия инвестиционного решения в момент  $t - 1$ .

$\mu_t$  – ожидаемая доходность есть условное среднее от  $X_t$ , при условии  $I_{t-1}$ , т.е.

$$\mu_t = E(X_t | I_{t-1}).$$

Ожидаемая волатильность  $\sigma_t^2$  есть условная дисперсия переменной  $X_t$ , при условии  $I_{t-1}$ , т.е.

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t | I_{t-1}).$$

Тогда

$$\epsilon_t = X_t - \mu_t$$

есть неожиданная часть доходности в момент  $t$ .

$$\begin{aligned}\mu_t &= E(X_t | I_{t-1}) \\ \sigma_t^2 &= \text{Var}(X_t | I_{t-1}) \\ \epsilon_t &= X_t - \mu_t\end{aligned}$$

## GARCH модель, Bollerslev (1986)

Процесс  $(\epsilon_t)$  называется обобщенным авторегрессивным условно гетероскедастичным (GARCH(1,1) процессом) если  $\epsilon_t = \sigma_t u_t, t \in \mathbb{Z}$ , где  $(\sigma_t)$  есть неотрицательный процесс, такой, что

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (1)$$

Мы рассматриваем две различные прокси:

- Lamoureaux and Lastrapes (1990) полагали, что объем торгов может быть прокси для числа новостей.
- Kalev (2004) использовал новостную интенсивность как прокси для потока информации. (Число новостей о компании в день  $t$  будем называть *новостной интенсивностью* в день  $t$ .)

Четыре альтернативные модели:

- GARCH модель дополненная данными об объеме торгов
- GARCH модель дополненная данными о *вчерашнем* объеме торгов
- GARCH модель дополненная данными новостной интенсивности
- GARCH модель дополненная данными новостной интенсивности за *вчерашний день*

# GARCH модель дополненная данными об объеме торгов

13

$$\begin{aligned}\mu_t &= E(X_t | I_{t-1}) \\ \sigma_t^2 &= \text{Var}(X_t | I_{t-1}) \\ \epsilon_t &= X_t - \mu_t\end{aligned}$$

*GARCH модель дополненная данными об объеме торгов.*

Процесс  $(\epsilon_t)$  такой, что

$$\epsilon_t = \sigma_t u_t, t \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где  $(\sigma_t)$  есть неотрицательный процесс, такой, что

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma V_t \quad (3)$$

*GARCH модель дополненная данными о вчерашнем объеме торгов.*

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma V_{t-1} \quad (4)$$

где  $V_t = v_t/v^*$  шкалированный объем торгов бумаги в день  $t$  ( $v_t$  есть дневной объем торгов бумаги в день  $t$  и  $v^* = \max_t v_t$ ),  $\omega > 0$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$  и  $\gamma$  – параметры модели.

# GARCH модель дополненная данными новостной интенсивности

14

Пусть  $r_t$  и  $r_t^*$  log return компании и log return FTSE100 index на интервале  $t$  соответственно. Рассмотрим процесс  $(\epsilon_t) = r_t - (\theta_1 + \theta_2 r_t^*)$  такой, что

$$\epsilon_t = \sigma_t u_t, t \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

где  $(\sigma_t)$  есть неотрицательный процесс, такой, что

*GARCH модель дополненная данными новостной интенсивности.*

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma n_t \quad (6)$$

*GARCH модель дополненная данными новостной интенсивности за вчерашний день.*

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma n_{t-1} \quad (7)$$

где  $n_t$  есть число релевантных новостей о компании в день  $t$ ,  $\omega > 0$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – параметры модели.

## Quasi-Maximum Likelihood

## Выводы

- GARCH(1,1) модель, дополненная данными объемов торгов, действительно удаляет GARCH и ARCH эффекты для большинства компаний из FTSE100
- GARCH(1,1) модель, дополненная новостной интенсивностью, имеет трудности в удалении этого эффекта.
- likelihood ratio тест показал, что GARCH(1,1) модель, дополненная новостной интенсивностью (или объемом торгов) имеет лучшие результаты, чем 'чистая' GARCH модель.

## GARCH–Jump модель, Maheu and McCurdy (2004)

Процесс  $(\epsilon_t)$  называется GARCH(1,1)–Jump процессом если

$$\epsilon_t = \epsilon_{1,t} + \epsilon_{2,t},$$

где

$$\epsilon_{1,t} = \sigma_t u_t, t \in \mathbb{Z},$$

где  $(\sigma_t)$  есть неотрицательный процесс,  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ .

$$\epsilon_{2,t} = \sum_{k=1}^{N_t} Y_{t,k} - \theta \lambda_t,$$

где

$$Y_{t,k} \sim \mathcal{N}(\theta, \delta^2),$$

$N_t$  есть Пуассоновская случайная величина с условной интенсивностью скачков  $\lambda_t = a + b\lambda_{t-1} + c\zeta_{t-1}$ , где  $\zeta_{t-1} = \mathbb{E}(N_{t-1}|I_{t-1}) - \theta\lambda_{t-1}$ .

## Дополненная GARCH–Jump модель

Процесс  $(\epsilon_t)$  называется GARCH(1,1)–Jump процессом если

$$\epsilon_t = \epsilon_{1,t} + \epsilon_{2,t},$$

где  $\epsilon_{1,t} = \sigma_t u_t, t \in \mathbb{Z}$ ,  $(\sigma_t)$  есть неотрицательный процесс,  
 $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ .

$$\epsilon_{2,t} = \sum_{k=1}^{N_t} Y_{t,k} - \theta \lambda_t,$$

где

$$Y_{t,k} \sim \mathcal{N}(\theta, \delta^2),$$

$N_t$  есть Пуассоновская случайная величина с условной интенсивностью скачков  $\lambda_t = a + b\lambda_{t-1} + c\zeta_{t-1} + \rho_1 n_{t-1}^+ + \rho_2 n_{t-1}^-$ , где  $\zeta_{t-1} = \mathbb{E}(N_{t-1}|I_{t-1}) - \theta\lambda_{t-1}$ ,  $n_{t-1}^+, n_{t-1}^-$  число положительных и негативных новостей в период с  $t-2$  по  $t-1$  соответственно.

Quasi-Maximum Likelihood

Метод квази-максимального правдоподобия

### 3. Введение в новостную аналитику

News analytics can be described as a measurement of the following quantitative and qualitative characteristics of news:

- 1 The nature of news;
- 2 The impact of news;
- 3 The relevance;
- 4 The novelty.

## Sources:

- News sources of news agencies;
- Pre-news;
- Social media (blogs, social networks, etc.)

## News

- Expected;
- Unexpected.

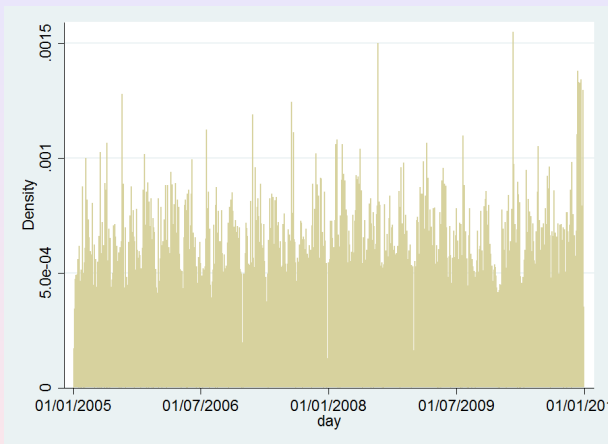
The most well-known providers of news analytics and data are:

- RavenPack ( <http://www.ravenpack.com/>).
- Media Sentiment ([www.mediasentiment.com/](http://www.mediasentiment.com/)).
- Thomson Reuters News Analytics (<http://thomsonreuters.com>).

| TIMESTAMP_UTC    | COMPANY   | RELEVANCE | ESS | ENS | CSS | WLE | PCM | ECM | RCM | VCM | NIP |
|------------------|-----------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 01.01.2005 14:00 | US/BXS    | 100       | 49  | 100 | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 3:37  | HK/2388   | 100       | 54  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 44  |
| 02.01.2005 13:55 | GB/OOM    | 100       | 66  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 23  |
| 02.01.2005 15:15 | CH/ROG    | 100       | 76  | 100 | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 15:15 | DE/BAY    | 100       | 49  | 100 | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 15:30 | CH/ROG    | 100       | 76  | 75  | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 15:30 | DE/BAY    | 100       | 49  | 75  | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 03.01.2005 0:58  | KR/005380 | 100       | 50  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 52  |
| 03.01.2005 0:59  | KR/005380 | 100       | 50  | 75  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 51  |
| 03.01.2005 1:00  | TW/2330   | 100       | 50  | 100 | 53  | 100 | 50  | 100 | 50  | 50  | 57  |
| 03.01.2005 1:00  | KR/005380 | 100       | 50  | 56  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 61  |
| 03.01.2005 1:18  | KR/005380 | 100       | 50  | 42  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 52  |
| 03.01.2005 1:33  | KR/005380 | 100       | 50  | 32  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 53  |
| 03.01.2005 1:45  | CN/000898 | 100       | 63  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 41  |
| 03.01.2005 1:53  | HK/0022   | 100       | 69  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 76  |

Figure: Extract from the Raven Pack Data Sheet

# Number of news for all UK companies per day 23



**Figure:** Total number of news for all UK companies per day (January 2, 2005 – December 31, 2010)

## 4. Эмпирические результаты

Период: 5 июля, 2005 – 5 июля, 2008 (750 торговых дней)

FTSE100 index

Представлены результаты только для 16 компаний, торгующихся на London Stock Exchange:

**Source:** Yahoo!Finance database

**News analytics data:** Raven Pack

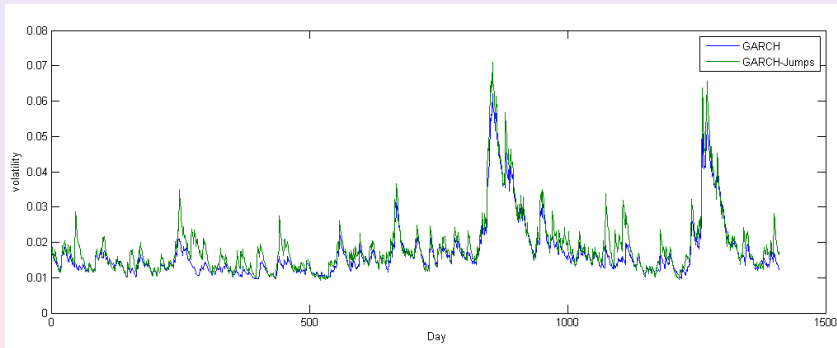
| TIMESTAMP_UTC    | COMPANY   | RELEVANCE | ESS | ENS | CSS | WLE | PCM | ECM | RCM | VCM | NIP |
|------------------|-----------|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 01.01.2005 14:00 | US/BXS    | 100       | 49  | 100 | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 3:37  | HK/2388   | 100       | 54  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 44  |
| 02.01.2005 13:55 | GB/OOM    | 100       | 66  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 23  |
| 02.01.2005 15:15 | CH/ROG    | 100       | 76  | 100 | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 15:15 | DE/BAY    | 100       | 49  | 100 | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 15:30 | CH/ROG    | 100       | 76  | 75  | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 02.01.2005 15:30 | DE/BAY    | 100       | 49  | 75  | 52  | 50  | 50  | 100 | 50  | 50  | 36  |
| 03.01.2005 0:58  | KR/005380 | 100       | 50  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 52  |
| 03.01.2005 0:59  | KR/005380 | 100       | 50  | 75  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 51  |
| 03.01.2005 1:00  | TW/2330   | 100       | 50  | 100 | 53  | 100 | 50  | 100 | 50  | 50  | 57  |
| 03.01.2005 1:00  | KR/005380 | 100       | 50  | 56  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 61  |
| 03.01.2005 1:18  | KR/005380 | 100       | 50  | 42  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 52  |
| 03.01.2005 1:33  | KR/005380 | 100       | 50  | 32  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 53  |
| 03.01.2005 1:45  | CN/000898 | 100       | 63  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 41  |
| 03.01.2005 1:53  | HK/0022   | 100       | 69  | 100 | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 50  | 76  |

Figure: Raven Pack Data Sheet

# Оценки параметров GARCH(1,1)–Jump модели

## 26

| Company             | $\alpha$ | $\beta$ | $\delta$ | $\theta$ | $\lambda$ | $\alpha+\beta$ | $LLF$   |
|---------------------|----------|---------|----------|----------|-----------|----------------|---------|
| Aviva               | 0.098    | 0.868   | 1.45     | -0.935   | 0.1336    | 0.9675         | 2112.94 |
| Barclays            | 0.155    | 0.832   | 1.09     | -0.245   | 0.2087    | 0.9880         | 2034.98 |
| BP                  | 0.062    | 0.870   | 1.05     | 0.025    | 0.5406    | 0.9328         | 2193.97 |
| Brit Amer Tobacco   | 0.029    | 0.957   | 0.676    | 0.088    | 0.9390    | 0.9874         | 2276.99 |
| BT Group            | 0.045    | 0.896   | 2.83     | 0.292    | 0.0884    | 0.9418         | 2139.51 |
| Carnival            | 0.032    | 0.933   | 3.13     | -0.486   | 0.0790    | 0.9654         | 2056.68 |
| Centrica            | 0.030    | 0.893   | 2.19     | 0.330    | 0.1292    | 0.9239         | 2149.50 |
| Capita              | 0.118    | 0.676   | 1.87     | -0.019   | 0.2229    | 0.7953         | 2190.98 |
| CRH Plc             | 0.166    | 0.823   | 1.54     | -0.523   | 0.0648    | 0.9897         | 2030.25 |
| Diageo              | 0.081    | 0.878   | 0.63     | -0.043   | 0.8506    | 0.9595         | 2423.93 |
| Intl. Cons. Air GrP | 0.079    | 0.899   | 1.89     | 0.105    | 0.2984    | 0.9785         | 1852.65 |
| Lloyds              | 0.093    | 0.885   | 2.08     | 0.130    | 0.0843    | 0.9790         | 2197.82 |
| Vodafone Grp        | 0.042    | 0.893   | 2.45     | -1.07    | 0.1261    | 0.9353         | 2035.85 |
| Anglo American      | 0.110    | 0.849   | 5.84     | -0.217   | 0.0146    | 0.9596         | 1755.43 |
| Intertek Group      | 0.126    | 0.681   | 1.21     | 0.052    | 1.0241    | 0.8079         | 2092.60 |
| Johnson Matthey Plc | 0.053    | 0.906   | 1.78     | -0.003   | 0.3192    | 0.9598         | 2085.05 |



**Figure:** GARCH model and GARCH model with Jumps performance for BP stock market closing daily prices (January 5, 2005 - December 31, 2010)

| Company             | $\alpha$ | $\beta$ | $\delta$ | $\theta$ | $\lambda$ | news   | LLF2    |
|---------------------|----------|---------|----------|----------|-----------|--------|---------|
| Aviva               | 0.097    | 0.873   | 1.11     | -0.790   | 0.09      | 0.055  | 2122.58 |
| Barclays            | 0.152    | 0.833   | 0.81     | -0.157   | 0.11      | 0.077  | 2039.48 |
| BP                  | 0.069    | 0.874   | 0.82     | 0.078    | 0.55      | 0.036  | 2198.82 |
| Brit Amer Tobacco   | 0.025    | 0.973   | 1.40     | -0.0348  | 0.01      | 0.055  | 2283.09 |
| BT Group            | 0.042    | 0.901   | 2.02     | 0.360    | 0.04      | 0.039  | 2159.51 |
| Carnival            | 0.050    | 0.882   | 2.19     | -0.172   | 0.06      | 0.101  | 2072.07 |
| Centrica            | 0.032    | 0.853   | 1.76     | 0.265    | 0.14      | 0.041  | 2156.53 |
| Capita              | 0.114    | 0.710   | 1.70     | -0.184   | 0.12      | 0.163  | 2212.32 |
| CRH Plc             | 0.185    | 0.800   | 0.03     | -0.270   | 0.02      | 0.031  | 2034.37 |
| Diageo              | 0.065    | 0.928   | 1.76     | 0.019    | 0.02      | 0.020  | 2432.57 |
| Intl. Cons. Air Grp | 0.078    | 0.900   | 1.88     | 0.537    | 0.28      | -0.009 | 1853.87 |
| Lloyds              | 0.098    | 0.885   | 1.83     | 0.321    | 0.03      | 0.041  | 2207.23 |
| Vodafone Grp        | 0.060    | 0.825   | 1.99     | -0.319   | 0.12      | 0.029  | 2053.31 |
| Anglo American      | 0.096    | 0.862   | 3.07     | -0.775   | 0.05      | 0.011  | 1756.06 |
| Intertek Group      | 0.128    | 0.683   | 1.22     | 0.005    | 1.02      | -0.043 | 2093.57 |
| Johnson Matthey Plc | 0.051    | 0.909   | 1.86     | -0.002   | 0.13      | 0.042  | 2086.81 |

**Table:** Результаты теста отношения правдоподобия для моделей GARCH–Jump и GARCH–Jump–news

| Company             | Null Hyp. |
|---------------------|-----------|
| Aviva               | rejected  |
| Barclays            | rejected  |
| BP                  | rejected  |
| Brit Amer Tobacco   | rejected  |
| BT Group            | rejected  |
| Carnival            | rejected  |
| Centrica            | rejected  |
| Capita              | rejected  |
| CRH Plc             | rejected  |
| Diageo              | rejected  |
| Intl. Cons. Air Grp | accepted  |
| Lloyds              | rejected  |
| Vodafone Grp        | rejected  |
| Anglo American      | accepted  |
| Intertek Group      | accepted  |
| Johnson Matthey Plc | rejected  |

## 5. Заключение

## Выводы

- тест отношения правдоподобия показал, что GARCH–Jump модель имеет лучшие результаты, чем «чистая» GARCH модель;
- GARCH–Jump модель, дополненная новостной интенсивностью, не удаляет GARCH и ARCH эффекты для всех компаний;
- тест отношения правдоподобия показал, что GARCH–Jump модель, дополненная данными новостной аналитики, имеет лучшие результаты, чем «чистая» GARCH–Jump модель;
- отрицательные новости имеют большее влияние на скачки волатильности, чем позитивные новости.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!